

盲人数学工作者的世界

Allyn Jackson / 文 香陵居士 / 译

造访盲人几何学家伯纳德·莫林（Bernard Morin）的寓所会让你大开眼界：客厅的墙壁上挂着一幅电脑绘制的图片。图片是他的学生弗朗索瓦·阿培里（François Apéry）绘制的，画的是伯伊曲面（Boy's Surface）——一种射影平面对三维空间的浸入。莫林最著名的成就是把一个球体如何“翻”出来的过程形象化，而伯伊曲面是其中的重要环节。莫林虽然看不见这张图，但他会很高兴地为你解说图中不容错过的细节。回到客厅，他搬来一把椅子站上去，摸索着从架子顶上找到一个盒子，然后端着盒子小心地爬下椅子，这时我长出了一口气。打开盒子，里面放的是他在上世纪六七十年代制作的陶模型，描绘了他研究的球面外翻（Sphere eversion）的各个中间阶段。他视力健全的同事用这些模型在黑板上辅助画图。他掌中所拿的，正是伯伊曲面的模型。这个模型不仅精确，而且设计巧妙，形态优雅，实在是一件艺术品。让人惊叹的是：如此一件精确而又对称的模型完全靠双手做出来的。制作这个模型的目的，是把莫林心中所清楚看到的模型展现在视力健全的人的面前。



伯纳德·莫林（1931-）

视力健全的数学工作者们通常都正襟危坐地炮制论文。有一个传说，说有人问一个著名数学家的女佣这个数学家每天都在干什么，女佣说他在一张纸上写写画画，然后揉做一团扔进垃圾桶。那么盲人数学工作者的一天呢？他们不可能在信封背面或是餐馆的餐巾上写些什么算式，或是挥挥手示意把“这个”加到“那个”上，或是把“那个”用在“这里”。不过从许多方面而言，盲人和其他数学工作者的工作方式一样：有人曾问过科罗拉多大学（University of Colorado）的盲人数学工作者劳伦斯·W·拜吉特（Lawrence W. Baggett），他是如何不用纸笔把复杂的公式印在脑子里的？他坦白地说：“嗯，这个，无论是谁都很难。”然而从另一方面来说，他们对数学的理解又有所不同。莫林回忆起一位视力健全的同事校勘他的论文时，需要进行冗长的行列式计算来确定一个正负号。这位同事问他是如何计算的，莫林说自己回答道：“我真不清楚——就是想象这个那个形体，感觉一下它的重量而已。”

历史上的盲人数学工作者



欧拉（1707-1783）

数学史上有许多盲人数学工作者。最伟大的数学家之一欧拉 (Leonhard Euler, 1707-1783) 在生命中的最后十七年里就双目失明。他自从在俄罗斯科学院地理教研室当主任以来, 就因为用眼过度眼睛严重疲劳而视力出现问题。他三十岁的时候右眼就开始出问题, 到了五十九岁的时候就几乎完全失明。欧拉是数学史上最高产的数学家之一, 写出了大概 850 篇论文。而神奇的是, 其中大约一半的论文是他在失明之后完成的, 他以惊人的记忆力, 在两个儿子和其他俄罗斯科学院的同事的帮助下完成了这些论文。

英国数学家尼古拉斯·桑德森 (Nicholas Saunderson, 1682-1739) 一生下来就因染上天花双目失明。然而他却精通法语、希腊语和拉丁语, 又研究数学。他申请剑桥大学被拒, 终身也未上过大学, 可是在 1728 年, 乔治二世国王却授予他法学博士学位。作为牛顿哲学的拥护者, 桑德森在剑桥大学当上了卢卡斯教授——牛顿本人就曾任此职位, 物理学家史蒂芬·霍金也曾任此职。桑德森发明了一种进行算术和代数计算的“盲人计算器”, 这种方法需要用一个类似算盘的工具以及一个叫做“几何板”的东西——这种东西现在已经在数学教学中应用了。桑德森在其著作《代数元素》(1740 年版) 中记述了盲人计算器的计算方法。他有可能还进行了概率论方面的研究: 统计历史学家史蒂芬·斯蒂格勒 (Stephen Stigler) 认为, 贝叶斯统计的思想方法可能是由桑德森而不是托马斯·贝叶斯 (Thomas Bayes) 首先提出的。

俄罗斯也出过几位盲人数学家, 其中最著名的是庞特里亚金 (Lev Semenovich Pontryagin, 1908-1988)。庞特里亚金十四岁时因一场事故而失明, 他的母亲肩负起了教育他的任务, 尽管母亲没受过多少数学训练, 数学知识也不多, 却可以给儿子朗读科学著作。他们一起“发明”了许多表示数学符号的词语, 比如集合交集的符号叫做“下头”, 而子集的符号叫做“右头”等等。1925 年, 庞特里亚金十七岁进入了莫斯科大学, 从此他的数学天赋便充分展露, 人们对他无需动笔就能记住复杂公式的超强能力充满惊奇。他成了莫斯科拓扑学派的顶尖人物, 在苏联时期仍和西方有着联系。他最重要的贡献在拓扑学和同伦理论领域, 同时也在控制论等应用数学领域做出了贡献。而现在还健在的盲人数学工作者有莫斯科斯捷克洛夫数学研究所的维图什金 (A. G. Vitushkin), 他主要研究复分析。

法国也有许多杰出的盲人工作者。其中最著名的包括路易·安东尼 (Louis Antoine, 1888-1971), 他是在一战时失明的, 那时他二十九岁。据说, 勒贝格建议他学习二维和三维拓扑学, 一部分原因是那时关于这方面的论文还很



庞特里亚金 (1908-1988)

少, 另一部分原因是因为“在这个领域, 捕捉的能力和全神贯注的习惯可以弥补失明的不足”。在二十世纪六十年代中期, 莫林见到了安东尼, 安东尼向这位后辈盲人数学工作者说明了他是如何得到自己那个著名结论的。安东尼在试图证明一个类似若尔当-舍恩弗利斯定理的命题 (若尔当-舍恩弗利斯定理是: 对于一个平面中的简单封闭曲线, 一定存在一个平面的同胚可以将这条曲线变成平面中的一个圆)。该命题为: 对于一个浸入三维空间中的三维球体, 存在一个三维空间的同胚可以将这个浸入球变为一个标准球。最终他发现, 这个“定理”并不成立。他第一个设计了三维空间中的非驯嵌入集——这个集合现在被称为“安东尼的项链”。它是一个康托尔集, 但其补集却并不简单联通。在安东尼的基础上, 亚历山大 (J. W. Alexander) 构造出了著名的“亚历山大带角球”, 这个带角球就是安东尼要证明的命题的一个反例。安东尼证明了: 可以从他的“项链”得到嵌入球。但是莫林问他这个嵌入球是什么样子的時候, 他却说自己想象不出来。

球面外翻

莫林自己的故事也很引人入胜。他 1931 年出生于上海, 那时他父亲在银行工作。很小的时候莫林就患上了青光眼并回到法国接受治疗。后来他回到上海, 但六岁时不幸因视网膜撕裂完全失明。他到现在还能回忆起童年时候所看到的事情, 回忆起那时他对光学现象的痴迷, 回忆起他曾醉心于万花筒的时光, 回忆起他的那本介绍红黄相配

得到橙色的书，回忆起那时看到的风景画并好奇如何能用一张平面展示三维图景。他早期的视觉记忆由于没有后来的干扰，所以尤其栩栩如生。

失明之后莫林离开上海回到法国并一直呆在法国。他在法国盲哑学校上到十五岁，然后上了一所普通高中。他对数学和哲学感兴趣，可他父亲并不认为儿子在数学方面会有多大建树，便让他读了哲学。莫林在巴黎高师学习了几年之后，放弃了对哲学的幻想而转学数学。他师从亨利·嘉当（Henri Cartan）并在1957年进入国家科学研究中心（Centre National de la Recherche Scientifique）担任研究员——此时的莫林已经因为球面外翻的研究而小有名气。后来他又师从勒内·托姆（René Thom），在1972年完成了关于奇点理论的论文拿到了博士学位，又在高级研究院工作了两年。莫林一生的大部分时间都在斯特拉斯堡大学（Université de Strasbourg）任教并于1999年退休。

1959年，史蒂芬·斯梅尔（Stephen Smale）证明了一个令人惊奇的定理：所有 n 维球面的欧氏空间浸入都是正则同伦的。这就意味着三维球体对三维空间的标准浸入和反浸入是正则同伦的。这也就是说球面可以外翻——或者说把里面翻到外面来。然而，根据斯梅尔论文构造球面外翻显得过于复杂。二十世纪六十年代早期，阿诺德·夏皮罗（Arnold Shapiro）做出了一种球面外翻的方法但并未发表。他把这种方法解释给了莫林，而莫林也已经独立构思出了类似的想法。物理学家马赛尔·弗诺萨特（Marcel Froissart）也对这个问题有兴趣并向莫林建议了一个关键性的简化步骤——而莫林制作陶模型正是为了和弗诺萨特合作。1967年，莫林首次展示了能够进行球面外翻的同伦。



史蒂芬·斯梅尔（1930-）

加州大学伯克利分校的查尔斯·皮尤（Charles Pugh）借助莫林的陶模型的照片构建了外翻不同阶段的鸡笼模型。1976年尼尔森·麦克斯（Nelson Max）制作的著名纪录片《球面外翻》就用了对皮尤模型测量的结果，麦克斯现在是劳伦斯·利弗莫尔国家实验室（Lawrence Livermore National Laboratory）的数学工作者。这部纪录片是计算机图形史上的奇迹。实际上莫林的球面外翻有两种方法，一开始他也不知道影片中记录的是哪一种。他询问了看过影片的同事，不过据他回忆“没人能说出到底是哪一种”。

自麦克斯的纪录片问世以后，世界上已经出现了其他的外翻方法，也产生了记录这些新方法的影片。其中一种外翻方法是低维拓扑的重量级人物威廉·瑟斯顿（William Thurston）发明的。瑟斯顿发明了一种能够从斯梅尔的原始证明中构造的方式。几何中心的影片《从外到内》记录了这种外翻方法。马萨诸塞大学阿姆斯特分校（University of Massachusetts at Amherst）的罗布·库什纳（Rob Kusner）发现了另外一种方法，他还提出了最小能量法可以用来做出莫林的外翻。伊利诺伊大学的数学工作者约翰·M·沙利文（John M. Sullivan）、乔治·弗朗西斯（George Francis）和斯图尔特·列维（Stuart Levy）在1998年拍摄的纪录片《最优外翻》记录了库什纳的这一想法。雕塑家、图形动画专家斯图尔特·迪克森（Stewart Dickson）用《最优外翻》中的数据为一个名叫“感知数学”的活动（该活动旨在制作盲人可以使用的几何体模型）制造出了最优外翻的不同阶段的数学模型。一部分模型在2000年9月的法国莫伯日（Maubeuge）举行的国际艺术与数学研讨会上送给了莫林。莫林开心地将模型放在了自己的客厅里。

双目失明不但丝毫没有影响莫林非凡的空间想象能力，反而有所裨益。他说像失明这样的残疾，会让人的长处更长，短处更短，所以“盲人的优缺点都更加突出”。莫林认为数学想象力分为两种，一种叫做“时间想象”，想象的是通过一系列步骤处理的信息，这种想象力能让人们进行长步骤的计算。“我的计算一直不好，”他说，而且双目失明让他的计算更不好。他擅长的是另外一种想象，他称之为“空间想象”，这种可以让人一次性理解所有的信息。

想象几何体的一个难点是：人们往往只能看见物体的外面，而看不见里面——但里面可能非常复杂。莫林通过同时仔细想象里外两面，培养出了一种“外翻内”——或者是从一块空间移动到另一块空间的能力，而这种空间想象似乎更依赖于触觉而非视觉。“我们的空间想象是靠触摸物体拼起来的”，莫林说，“你可以在手上把玩模型，而不是用眼睛看。这样的话‘外面’和‘里面’就只和你对模型的动作有关了”。因为他太熟悉触觉信息了，可以在把玩一个模型几个小时之后几年都记得其形状。

几何：纯思考

2001年七月，在德国著名的黑森林数学研究所（Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach）的一次会议中，伊曼纽尔·吉鲁（Emmanuel Giroux）做了关于他最近的工作的报告，报告的题目是《接触结构和“打开的书”分解》。尽管吉鲁双目失明，他的报告仍然是这一周会议中最清晰、最有条理的——也可能这都是失明的贡献。他坐在投影仪旁一张张地换幻灯片，显然他很清楚每张幻灯的准确内容。他用手比划出自己对于一个几何体是如何接触另一个边界的精确描述。之后，听众中有些人回忆起了吉鲁的另一场报告：报告中他像放电影一样，一帧帧地清晰描述了某个数学现象。“这是我做事的方法，我的风格是尽可能的清晰”，吉鲁说，“不过，我经常也因为其他数学工作者无法解释他们在黑板上写了些什么、画了些什么而非常沮丧”。所以，他讲得清晰，部分原因是为了向那些视力正常但讲得使人云里雾里的同事抗议。

吉鲁十一岁就双目失明。他注意到大部分盲人数学工作者都是研究几何的——可是为什么是几何呢？这可是最需要“看见”的数学领域啊！“其实只是纯思考。”吉鲁回答说。他解释说，例如在分析学中，一个人必须得计算，一行一行做。用盲文就很麻烦：写点东西得打一大堆孔，读的时候还得翻过来摸。这样一来写很长的计算式就非常困难（将来随着无纸书写工具——例如可重写盲文工具的发展，这可能容易一些）。而相比起来，“搞几何学，内容就集中的多，你可以全装在脑子里。”吉鲁说。到底装在脑子里的是什麼，这很神秘，还不一定是图形——图形是一种表示数学对象的方法，但却不是思考对象的方法。

阿里克谢·索辛斯基（Alexei Sossinski）指出，许多盲人数学工作者研究几何并不奇怪。一个视力健全的人的空间想象力是来自于大脑对于三维世界投射在视网膜上的二维图像的分析能力，而盲人的则来自于大脑对触觉和听觉信息的分析。无论哪种情况，大脑都会根据感官信息而灵活地建立起空间表达。索辛斯基指出，对复明的盲人的研究表明：人具有与生俱来的理解基本拓扑结构（例如一个东西上有多少个洞）的能力。“刚复明的时候，他无法分辨出一个正方形和一个圆，”索辛斯基写道，“只能觉察到它们拓扑等价。但是他们立即就能注意到圆环和球的不同”。索辛斯基在私下的谈话里说到，视力正常的人们有时会对三维空间产生错觉，原因是视网膜上的二维投影信息既不充足又误导人。“盲人（通过其他感觉）建立起一个没有形变的、直接的三维空间的感觉。”

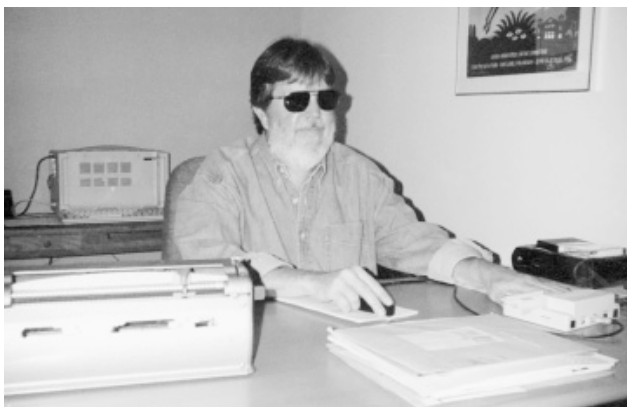
至少自柏拉图（Plato）以来，人们很长时间一直试图

理解空间想象能力。柏拉图相信，无论人是否失明，理解空间关系的能力都是一样的。而笛卡尔（Descartes）根据视力受损的人们通过触摸来认知形态，在1637年的《方法论》中声称人们在头脑中构造模型的能力是天生的。十八世纪晚期，狄德罗（Diderot）在研究中接触了盲人，并总结说人们可以仅靠触觉就良好地感知三维物体。他还发现大小的变化对盲人而言并不是问题，盲人可以“在头脑中放缩形体。这种空间想象往往是靠回忆和重新组合对物体的感觉”。近几十年有许多关于盲人空间想象力的研究。流行的观点是盲人的空间想象力比视力健全的人更弱或者更差。但也有学者不同意这种观点：盲人以及视力健全的人的空间想象能力在执行许多普通任务——比如记忆走路路线的时候并无差异。

分析学的挑战

并非所有的盲人数学工作者都研究几何。尽管分析学对失明人来说是个棘手的问题，但还是有不少人选择了分析学——比如劳伦斯·拜吉特（Lawrence Baggett）。他已经在科罗拉多大学波尔得分校（University of Colorado at Boulder）任教三十五年了。他五岁失明，但从小就喜欢数学，可以在头脑中做许多思维体操。他从没学过除法的正规算法——因为用盲文来做长除法太复杂了——可是他发明了自己的除法算法。盲文书籍很有限，他便让母亲和同学为他朗读。他一开始想做律师，因为“那时候盲人都当律师”，不过以后上了大学，他就决定改学数学了。

拜吉特说他自己的几何从来没学好，因为他无法想象那些复杂的拓扑结构。不过这并不是因为他的视力缺陷。他说，要想象一个四维球体，“我不认为看得见能有什么



劳伦斯·拜吉特（1929-）

帮助”。有时候在研究时他会想象公式图表以及提示性的画面。他在头脑中反复思考一个问题的时候有时会写点盲文笔记，不过并不常这样做。“我会试着念出来，”他解释说，“我经常踱着步子自言自语”。跟视力健全的同事搭配工作会比较容易，他们可以帮着查阅资料，或是看懂一长串的式子是什么意思。其他的東西呢，拜吉特说，都和两个视力健全的人一样。可是，比如像在黑板上画个图或是列个式子计算呢？“他也会写给我画给我！”拜吉特笑着说，同事会用语言把黑板上的东西描述出来。

拜吉特并不觉得他心算能力强。“我觉得视力健全的数学工作者也可以心算很多东西，”他说，“不过还是写在纸上方便”。有一件事佐证了这一点：某年冬天拜吉特在波兰参加一次会议，会议大厅的灯忽然灭了，顿时一片漆黑，可作报告的没有停。“他积了分，进行了傅立叶变换，大家都跟得上，”拜吉特回忆说，“这说明一点：可以不要黑板，只是黑板更方便”。

盲人数学教授必须有新的教学方法。有些人是这样的：在黑板上书写的时候第一行齐眉，第二行齐唇，第三行齐颈等等。拜吉特也用黑板，不过更多的是为了调整讲课的节奏而非系统地传递信息好让学生抄笔记。实际上他会告诉学生们：不要抄板书，要记说的话。“我写板书只是为了让我的课看起来跟其他人一样，”他说，“许多学生选择在我的课上用不一样的方法学习，他们做到了”。拜吉特用 TeX 出考题，还建了一个网站来存放家庭作业和其他信息。打分方面，他本可以让别人代打，“不过这样我就听不到学生的反馈了”，所以他就采取了各种打分方式：诸如让学生根据自己的作业进行口头报告等等。很明显，拜吉特对教学的热爱，对学生的关心让他克服了失明给他带来的局限性。

交流方式

诺伯托·萨利纳斯 (Norberto Salinas) 二十世纪六十年代在阿根廷长大，自十岁起就失明了。跟拜吉特一样，他周围盲人的“标准职业”也是当律师，这样一来就没有什么数学物理的盲文资料。不过萨利纳斯的父母会给他朗读并且录音。他的土木工程师的父亲问自己在布宜诺斯艾利斯大学 (University of Buenos Aires) 数学物理系的朋友，儿子是否能参加入学考试。由于萨利纳斯考了最高分，于是学校允许他入学。在《数学史》杂志关于盲人数学工作者的网上讨论组中，帝国理工学院 (Imperial College) 的爱德华多·奥尔蒂斯 (Eduardo Ortiz) 回忆起他在布大的分析课堂上考核萨利纳斯的情景：当时他在奥尔蒂斯的手

掌上画图来表现图形信息。后来奥尔蒂斯用这种方法在帝国理工学院教其他的盲人学生。萨利纳斯在秘鲁短暂地教过书，之后去美国密歇根大学读了博士，目前他在堪萨斯大学任教。

萨利纳斯说他经常喜欢把录音资料转换成盲文，这一步骤帮助他掌握知识。他设计了一套表示数学符号的盲文，并在二十世纪七十年代协助设计了一套表示数学符号的西班牙语盲文标准。美国的数学符号盲文标准内梅斯代码，是由二十世纪五十年代一位盲人数学工作者、计算机教授亚伯拉罕·内梅斯 (Abraham Nemeth) 发明的 (内梅斯现在已经从底特律大学退休)。内梅斯代码继承了普通的六点式盲文的格式并用来表示数字和数学符号，且使用特殊指示符号来将数学符号和普通文字区别开来。标准盲文显然不是为科技资料所设计的，因为它连最普通的科技符号也表示不了，甚至连数字也必须用字母表示 (例如用 a 表示 1, b 表示 2, c 表示 3 等等)。内梅斯代码学起来不简单，因为同样的字符在盲文中是一个意思，在内梅斯代码中是另外一个意思。然而它对协助盲人——尤其是盲人学生——阅读科技材料而言却非常重要。萨利纳斯和俄勒冈州立大学 (Oregon State University) 的一位盲人物理工作者约翰·加德纳 (John Gardner) 发明了一套新的代码 GS8。GS8 使用八个点，而标准盲文六个点，多出来的两个点是留给数学符号的，这样一来就能表示二百五十五个字符，而不是标准盲文的六十三个了。另外，GS8 的语法也是基于 LaTeX 的，这就使得 GS8 文件和 LaTeX 文件可以互相转化。

计算机为盲人打开了一个全新的可以交流的世界。像 Jaws 或者 SpeakUp 这样的屏幕朗读软件可以用合成语音将屏幕上的文字读出来。不过很可惜，这些程序读包含数学符号的文字的时候都表现不佳。有些盲人数学工作者只用这些软件阅读邮件或是上网 (随着图片用的越来越多，上网对盲人来说也越来越复杂)。康奈尔大学的一位计算机科学家拉曼 (T. V. Raman) 开发了一个名叫 AsTeR 的程序，这个程序可以输入一个 TeX 文件，然后输出一个用合成语音朗读的声音文件，数学公式和文字都能朗读。加德纳也开发了一个软件 TRIANGLE，也带语音合成但比 AsTeR 更简单，这个软件还带一个 LaTeX 和 GS8 代码互相转换的程序。

有些盲人数学工作者直接阅读 TeX 源文件。吉鲁就用一台可重写盲文触摸屏来阅读。他说，录制一篇论文的录音对他而言更好，不过在录音之前他要先看一下自己是否对文章感兴趣。阅读 TeX 源文件能让他迅速直接地了解论文。当然，TeX 文件是设计给电脑而非人阅读的，因此就会很复杂而冗长。不过吉鲁说：他很容易从电子预印服

务器和期刊杂志拿到 TeX 文件,以便跟踪当前的研究成果。书籍比论文要更麻烦一些,因为尽管 TeX 是数学书的标准出版格式,可是要从出版社拿到 TeX 源文件并非易事。

盲人能学数学

健全人对数学了解不多,于是很自然地就认为数学符号会给盲人造成不可逾越的障碍。而实际上,对于盲人来说,数学比其他职业要容易得多。原因之一是数学语言比其他语言要精炼,数学式子很短,所以研究数学要阅读的东西就少。“研究数学,”萨利纳斯说,“只需要看寥寥几页就能学到一大堆东西。”另外,盲人的想象力往往很好,而想象是研究数学的理想境界。莫林指出,往往视力健全的人学几何的时候,想象两个相交平面是在书上所画的二维图片,几何对他们来说就是这些二维图片,他们对自然世界中的平面毫无概念。而盲人因为不用这些图画,所以能很自然地想象抽象的平面。

当前最著名的美国盲人数学工作者可能是扎卡里·J·巴特尔斯(Zachary J. Battles),他的光荣事迹甚至登上了《人物》杂志的封面。巴特尔斯也几乎是一出生就失明,三岁的时候被人从韩国孤儿院收养。他在宾夕法尼亚州立大学读完了数学学士,而后又读了计算机学士和硕士,还两次到乌克兰教英语并担任残疾学生的导师。如今,他获得了罗兹奖学金(Rhodes Scholarship)在牛津大学学习数学。巴特尔斯像其他许多盲人数学工作者一样,激励着视力健全人以及盲人。

编者后记

在中国,当代的盲人应用数学家是中山大学的富明慧教授。他 1988 年 7 月毕业于吉林大学数学系力学专业,获得学士学位;1991 年 9 月公派赴莫斯科大学数学力学系固体力学专业留学,1995 年 2 月获得博士学位;1995 年 5 月至 1997 年 4 月在清华大学工程力学系做博士后,1997 年 5 月出站,到中山大学应用力学与工程系工作。同年 7 月晋升副教授,2004 年晋升教授和博士生导师。其主要研究方向是复合材料力学、计算固体力学。虽然他看不见课本,也看不见黑板,但他靠两块小小的磁铁,建起了板书坐标。为方便备课他在学生帮助下,将教材内容输入电脑,反复听反复记,直到整本书倒背如流。详细资料见:
<http://news2.sysu.edu.cn/theory01/124827.htm>



富明慧(1966-)

延伸阅读:

新京报:《谷歌盲人工程师讲述软件设计之路》:

<http://www.newhua.com/2012/0116/142133.shtml>

蒋迅:《NASA 的盲人黑人工程师马可·米登》:

<http://blog.sciencenet.cn/blog-420554-565144.html>

本文大部分内容译自美国数学会刊物 Notices:

<http://www.ams.org/notices/200210/comm-morin.pdf>