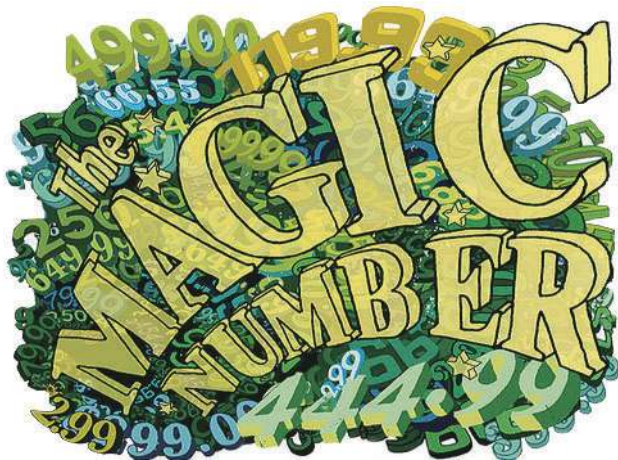




数字间的邂逅

柳形上

哪里有数，哪里就有美。

——普罗克勒斯（Proclus）如是说

在我们的孩提时代，就和数字相识……数的世界，看似如此的简单平常，让我们不以为然。然而经由发现的眼睛，这里的世界却是奇妙的。上学期某一次的数学文化课堂，我们曾通过两个数字：153 与 666 来分享这样的理念——数的世界有大美在焉！

I 开篇之曲

回眸处，在远古时代人们的眼里，数或具有童真的色彩。毕达哥拉斯学派相信神用“数”创造了宇宙万物。数是万物之母，整个世界——物质的、形而上学的一切，都是建立在 1, 2, 3, ……这些数的离散模式之上的；1, 2, 3, ……是上帝创造世界的砖块。

这是一个卓越的理念，简单而美妙。数具有魔术般的性质：音乐的和声是数的简单比例，天空中的一切都是数的各种音乐和不同的数之间的和弦。

在古希腊人眼里，每一个数可以有其独特的属性。比如数字 1 是数之源，代表理性；2 表示变化多端的见解，它是第一个阴性数；3 代表着和谐，它也是第一个阳性数；4 表示公正，因为它是第一个平方数；5 表示婚姻，因为它是第一个阴性数与第一个阳性数之和： $2 + 3 = 5$ ；6 代表完美，因为它是上帝创造世界的天数。

II 奇妙的圣经数

153 是一个奇妙的数，它也被称作“圣经数”。之所以得此大名，或因为它有出现在《圣经》里。在《圣经·新约》约翰福音第 21 章里记载了这样一个故事——



提比哩亚海

话说耶稣死而复活之后，在提比哩亚的海边向 7 个门徒显现，当时耶稣的门徒打了一整夜的鱼，什么也没有打着。天将要亮的时候，耶稣站在岸上，但是门徒却不知道是耶稣。

耶稣对门徒说：“你们把网撒在船的右边，就必得着。”

他们便撒下网去，竟拉不上来，因为鱼甚多。当他们把网拉到岸上之后，发现网满了大鱼，共 153 条。

153，或许你曾许多次和它不经意间相逢。只是你并不知晓，其实它具有许多奇妙的数学性质。

(i) “圣经数”153 是一个三角形数——153 恰是前 17 个自然数的和：

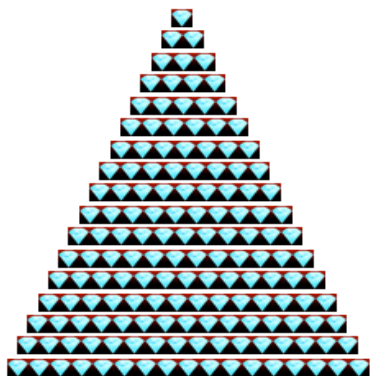
$$153 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 17$$

(ii) 153 恰是前 5 个自然数的阶乘之和：

$$153 = 1! + 2! + 3! + 4! + 5!$$

(iii) 153 还有一个奇妙的特性：

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$$



有着这一特性的数被称作水仙花数。水仙花是我国的十大名花之一，在 1300 多年前的唐代即有栽培，深得人们喜爱，因而有许多的别名——凌波仙子、金盏银台、洛神香妃、玉玲珑……

让我们阅读如下的数学画片——

任给一自然数 m ，我们记 $P(m)$ = 数 m 的所有数位中数字的 3 次方之和。

进而我们有如下的有趣发现——

水仙花数的黑洞：任给一个被 3 整除的自然数，对其作有限次的 P 映射迭代必可回归到圣经数 153。其例证如下：
 $P^5(201) = 153$; $P^6(36) = 153$; $P^3(333) = 153$ 。

画外音：在所有三位数中，有着水仙花数特性的数还有 370, 371, 407：

$$\begin{aligned} 407 &= 4^3 + 0^3 + 7^3 \\ 370 &= 3^3 + 7^3 + 0^3 \\ 371 &= 3^3 + 7^3 + 1^3 \end{aligned}$$

在众多数学人的眼里，水仙花数是指一个 n 位数 ($n \geq 3$)，它的每个数位上的数字的 n 次幂之和等于它本身。借助于相关的理论分析，我们可知道，满足这一属性的数是稀有而珍贵的——只有有限多个，而最大的水仙花数不超过 34 位。在计算机的辅助下，我们可写出所有水仙花数。下面的表格列出了 3-8 位间的水仙花数。

n	n 位水仙花数
3	153, 370, 371, 407
4	1634, 8202, 9474
5	54748, 92727, 93084
6	548834
7	1741725, 4210818, 9800817, 9926315
8	24678050, 24678051, 88593477

在西方，水仙花数又有着“自恋数”的名号，此缘自一个希腊的神话故事——纳西索斯 (Narcissus) 的哀伤。这是一个特别的故事，无关众神之间的明争暗斗，无关人间王国的王朝更替，而只是一个讲述爱上自己倒影的离奇故事：

美少年纳西索斯是河神刻菲索斯 (Cephisus) 与林间仙女莱里奥普 (Liriope) 的儿子。他的出生伴随着一个来自先知忒瑞西阿斯 (Tiresias) 的奇特预言。预言说，纳西索斯绝不可见到自己的倒影，否则他将死去。带着这样的一个预言，纳西索斯渐渐长大，成为全希腊最俊美的男子。无数的少女对他一见倾心，可他却不留情地拒绝了所有的人。

伊可 (Echo) 是一个美丽的山中仙女，也是被拒绝者中的一个。伊可十分伤心，日日在幽静的山林中流泪徘徊，很快地消瘦下去，直至她的身体完全消失，只剩下忧郁而轻柔的声音在山谷中回荡。此后希腊人用伊可的名字 (Echo) 来表示“回声”。

纳西索斯的行为惹怒了阿尔忒弥斯 (Artemis)，她决定让纳西索斯去承受痛苦：爱上别人，却不能以被爱作为回报。于是有一天纳西索斯无意间看到自己在水中的倒影——一个比他以前见过的任何人都更加俊秀的少年。他疯狂地爱上了他，无数次将手伸入水中，想要拥抱水中的他，最后溺水而死。他的身体化作一朵晶莹剔透、出水而立的水仙花 (narcissus)。顺便说一句，narcissism (自恋) 这个词即源于 narcissus。

III 魔鬼数 666

经由数学的眼睛，666 也是一个奇妙的数。这个数被称为魔鬼数。其亦有着圣经故事的背景——

666 这个数字在圣经中有记载，在启示录 13: 18 中如此写道：

" This calls for wisdom. If anyone has insight, let him calculate the number of the beast, for it is man's number. His number is 666 . " (“在这里有智慧：凡有聪明的，可以计算兽的数目；因为这是人的数字，他的数目是 666。”)

缘何 666 被认为是邪恶的，不祥的数字呢？有一种说法是，因为 7 有着神圣、祝福、圆满、完全的意思，而 666 则是七缺一后重复三次，表示极不完全的意思。

不管 666 是否真的会带来不幸，西方人很忌讳这一魔鬼的代号或是一种文化的认同。下面流传的这个故事或多或少说明这一点：