重心（Barycentric）坐标的一个妙用

万精油

上期的趣味数学题目是用两个不同容量的容器分酒。为便于描述，我们把上次的题目再重复一下。

上期题目：一个能装 14 两酒的容器装满了酒。另有两个容器，一个能装 11 两，一个能装 5 两。这些容器都没有刻度，现要求你用这三个容器把酒分成均等两份。

这是一道经典题目。这个题目不麻烦，相信许多喜欢数学问题的人都碰到过。只是容器的容量不同。对于小一点容量数目，可以多试几次就得出答案。但如果要找对任意数目的通解，我们就要用到更系统的方法。

先看一下对具体数目的解。解题过程可用下面的矩阵表示，第一行是瓶子的容量，后面是每一步时每个瓶子里的酒的数量。刚开始两个小瓶是空的，所以状态是（0 0 14）。第二步（0 11 3）就是把酒从 14 两的瓶里倒进 11 两的瓶里，大瓶里还剩 3 两。其它以此类推，

5	11	14
0	0	14
0	11	3
5	6	3
0	6	8
5	1	8
0	1	13
1	0	13
1	11	2
5	7	2
0	7	7

最后的结果是（0 7 7）。均分 14 两，问题得解。

这个问题我们把它简称为（5, 11, 14）问题。对于（19, 23, 40）问题，步骤就要多很多。如果再加大到（29, 37, 60），没解出题以前已经倒晕了。

更一般的情况：一个能装 X 两酒的容器装满了酒。另有两个容器，一个能装 Y 两，一个能装 Z 两。$X > Y > Z$。这些容器都没有刻度，现要求你用这三个容器把酒分成均等两份。

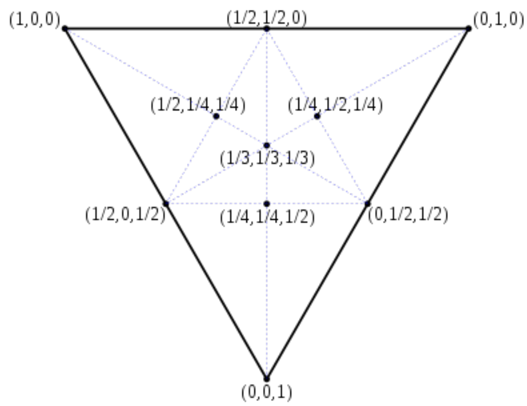
对于大一点的数，我们不能盲目地瞎倒，必须要有一般的解法。需要设计一个固定步骤，只需遵循这个步骤就可以找到解（或证明解不存在）。

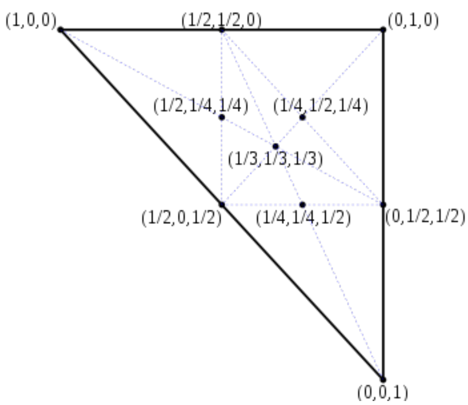
古老的重心（Barycentric）坐标系统闪亮登场。

重心坐标系统是莫比乌斯 1827 年引入的，近代数学甚至把这个重心坐标概念推广到代数几何簇的仿射坐标里。以前学到重心坐标，总觉得是数学家头脑里想象出来的玩意，不会有太多现实意义。后来在工作中需要写一个 N 维空间中的插值程序，竟然很自然地用到了重心坐标，又一次为纯数学研究正了名。重心坐标的奇妙还不仅于此，对我们眼下的

这个分酒题目也可以派上用场。这个古典的大瓶小瓶分液体问题，以前不知做过多少次，每次都是硬试。但如果用重心坐标，就可以得到通解。

先讲一下重心坐标。重心坐标的定义本来适用于任意 N 边形。但对于我们解这道题来说，只需用到三角形，所以我们只讲它在三角形上的定义。一般情况下的定义可以类推。三角形上的重心坐标也叫面积坐标。因为对于三角形 ABC 来说，点 P 的重心坐标与三角形 PBC，PCA，PAB 的面积成比例。如果我们限制坐标和为 1，那么对任意一点 P，这个比例就唯一确定了三个数，它们就是 P 的重心坐标。如图：





对于我们这道题，为了方便，我们不限定坐标和为 1，而是只保持其比例部分。这样一来，我们可以只与整数打交道。具体说起来就是，在一个等边三角形里作平行于每条边的平行线。在（5, 11, 14）问题里，最大的瓶子容量是 14，我们就作 14 条平行线（包括边线本身）。这样一来，三角形就被分成许多格点。一个点的三个坐标就是那个点到三条边的距离（在这个题里表示酒瓶里所剩酒的数量）。最后，以每个瓶子的容量线为边界作一个多边形（下图中的绿线）。

如何用这个图来解决我们的问题呢？我们可以把这个多边形想象成一个台球桌。从起点开始，让一个球沿坐标线跑（相当于台球在边界上做弹性碰撞）。这样一直跑下去，如果碰到平分点（0, 7, 7）点，那个路径就是解，如果没碰到平分点就开始循环，说明没有解。

注意到从起始点可以有两个方向出发，所以有解的话就有两种解。当然，我们选择比较短的那个。下面的两个图就是用这个方法解题的示意图。蓝线是坐标线，绿线是边界，红线是跑的轨迹。上方的顶点是起始点。另一个粗红点是终点（解）。旁边是对应的步骤。