

张家山汉简《算数书》“𠄎材”三题

吴朝阳 晋文

张家山汉简《算数书》与“𠄎材”相关的共有“𠄎材”、“以𠄎材方”、“以方材𠄎”三个算题。“𠄎材”算题因为出土原简字迹难辨之处太多，造成原释文中有许多缺文，至今没有令人满意的释读，而“以𠄎材方”及“以方材𠄎”二题，则因为题中的公式与单纯的数学公式不一致，导致学者们意见纷纭、莫衷一是。本文首先将“𠄎材”原简字迹难辨处加以处理，从中得到关键线索，并考证出正确的释读。对“以𠄎材方”及“以方材𠄎”两个算题，我们则根据上古数学水平、算题的应用实际性质以及《算数书》中的例证展开论证，从而得到正确的释读。



一 “𠄎材”

张家山汉简《算数书》的“𠄎材”题共含 156、158 号两支简，张家山二四七号汉墓竹简整理小组的释文为：

𠄎（圓）材 有圓材一（？），斷之口口市口口口口口口口口大几何？曰：七（？）十（？）六（？）口口四寸半寸。
述（术）曰：口自乘，以（156）
入二寸益之，即大数已¹。（158）

由于很多文字无法释读，本题诸家均无法读通²。笔者对原简图版进行一定程度的技术处理，使一些关键字得以读出，部分图版处理结果如下³：

从图 1 可知，“圓材”之后还有余地，并有墨迹，因此，原释文“一”字可取。从图 2 可以看到，原释文“斷之口口市”是成问题的，对比“斷”字的隶书写法可以发现，此段竹简的第一个字左上有二小“口”字形，其形比“斷”之小“口”明显要大，而其下既没有“斷”字那么多笔划的墨迹，最左侧并无“斷”字之“乚”形之残墨，空间也不足以容纳“斷”字的左下部。因此这个字不是“斷”字，而应该是“𠄎”字。综合字迹及图 2 其他简文可以发现此字确为“𠄎”字，而此段简文为“𠄎之入二寸”。

“𠄎”与“斷”一字之差，关系到全题的理解与释读。岳麓书院藏秦简《数》书以及《九章算术·勾股》都有“𠄎圓材”的算题，其文援引如下：

[今]有圓材薶[埋]地，不智[知]小大，斫之，入材一寸而得平一尺，问材周大几（可）[何]？即曰：半平得五寸，令相乘也，以深一寸为法，如法得一寸。有[又]以深益之，即材径也⁴。

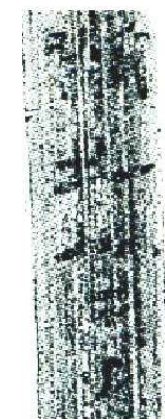


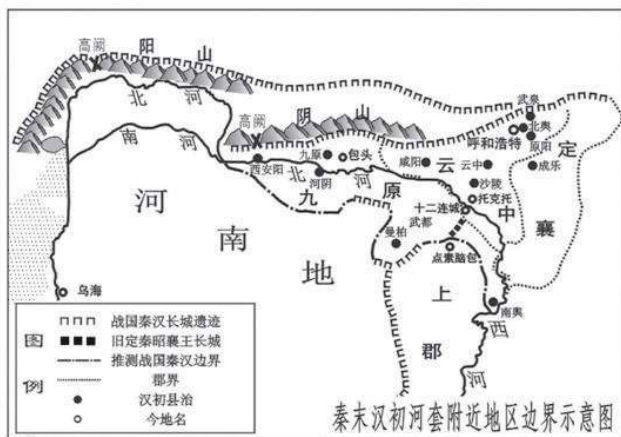
图 1：有圓材一 图 2：𠄎之入二寸 图 3：平尺四寸 图 4：曰大二尺有 图 5：六寸半寸

¹ 参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简[二四七号墓]（释文修订本）》，文物出版社，2006 年 5 月，第 153 页。按：整理小组误将 157 号简归入此题，为简化讨论，此处径略去此简。

² 参见：彭浩：《张家山汉简〈算数书〉注释》，科学出版社，2001 年，第 113 页；郭世荣：《〈算数书〉勘误》，《内蒙古大学学报（自然科学版）》，2001 年第 3 期；郭书春：《〈算数书〉校勘》，《中国科技史料》，2001 年第 3 期。

³ 原图片参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：前揭书，第 96 页 156 号简。

⁴ 简文转引自：肖灿、朱汉民：《岳麓书院藏秦简〈数〉的主要内容及历史价值》，《中国史研究》，2009 年第 3 期。



今有圆材，埋在壁中，不知大小。以锯锯之，深一寸，锯道长一尺。问径几何？答曰：材径二尺六寸。术曰：半锯道自乘，如深寸而一，以深寸增之，即材径⁵。

张家山汉简《算数书》本算题所论是“圆材”，简文有“斲之入二寸”句，并且“而得”、“问口大几何”、“寸自乘”、以及“入二寸益之”都可以明确释读，在简文中又都处于合适的位置。因此，对比以引岳麓秦简《数》及《九章算术》中的算题，本题毫无疑问是一个同类的“斲圆材”算题。因此，算题中无法确认的文字可以借助这两则算题的行文方式来做判断。

图3所示竹简片段第一字无法辨认，第二字的位置依上下文及墨迹形状应是“尺”字，第三字据文义是一个数字，依墨迹形状判断应为“六”或者“四”字，而最后一字依文义及残墨则可以肯定为“寸”字。此段竹简之前有“而得”二字，其中“而”字可辨，“得”字依上下文可以断定。对照岳麓书院藏秦简《数》书相应内容，可以判断此四字为“平尺四寸”或“平尺六寸”。

图4、图5两部分，原释文为“曰七(?)十(?)六(?)”及“口口四寸半寸”。据图5，“寸半寸”可辨，而前一字依残墨判断，或者如原释文是“四”字，或者是“六”字。图4除“曰”字外均不可辨，但依上下文知其为“曰大口尺口”。考虑图5简文是“口寸半寸”，而“尺”后面的字残墨之迹与“有”近似，故依行文此字应为“有[又]”字。至此，据计算可知，此答数为“二尺有六寸半寸”，而图3则为“平尺四寸”。

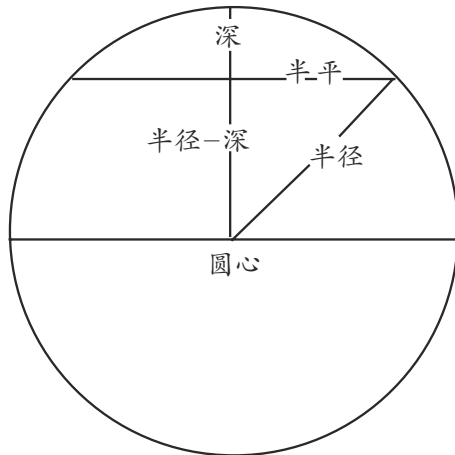
⁵ 参见：李继闵：《〈九章算术〉导读与译注》，陕西科学技术出版社，1998年9月，第695-697页。

对照上引岳麓秦简“术”的行文，可知158号简脱漏“为法，又以入二寸”七个字。因为“入二寸”在我们复原的简文中出现两次，所以这一脱误的原因是明显的：它是因简文上下有两处“入二寸”，抄写者不慎相涉而产生脱误。至此，我们得到复原的简文如下：

圆材 有圆[材]一，斲之入二寸，而得[平尺四]寸，问[材]大几何？曰：大[二尺有六]寸半寸。术[术]曰：[七]寸自乘，以(156)

入二寸【为法，又以入二寸】益之，即大数已。(158)

此处，158简中的“大”即问题中的“材大”，“大数”即为圆材直径之尺寸数。《九章算术》将此类算题归入“勾股”章，其计算公式由勾股定理推导而得，其推导过程如下：



如上图，(半径-深)、半平、半径构成直角三角形，据勾股定理得：

$$(\text{半径}-\text{深}) \times (\text{半径}-\text{深}) + \text{半平} \times \text{半平} = \text{半径} \times \text{半径}$$

展开、化简，得：

$$2 \text{ 深} \times \text{半径} = \text{半平} \times \text{半平} + \text{深} \times \text{深}$$

因此，

$$\text{直径} = \text{半平} \times \text{半平} / \text{深} + \text{深}$$

本题、上引岳麓秦简、《九章算术》三者算法的叙述方式相互均有所不同，但它们都是以上这个公式。按照这个公式，本题的计算如下：

$$\text{圆材的直径} = \frac{7 \times 7}{2} + 2 = 26 \frac{1}{2}.$$

二 “以畧材方”

张家山汉简《算数书》“以畧材方”及“以方材畧”两个算题，由于其“术”提供的公式不同于从数学出发而推得的所谓正确的公式，因而历来研究者要么认为其公式有误，要么认为其数据有误⁶。然而事实并非如此，我们将证明：这两个算题中的公式不是纯数学公式，它们是根据生产实际，测算以圆形木材制造的方形材大小的应用公式。本小节先讨论“以畧材方”算题，其简文如下：

以畧材方 以圓材为方材，曰：大四韦[围]二寸廿五分寸十四，为方材几何？曰：方七寸五分寸三。术曰：因而五之为实，令七而一，四（153）

【而】一即成⁷。（157）

原释文“以畧材方”只有153号简，此算法，即“术”文显然是不完整的，苏意雯等、段耀勇及邹大海、以及日本张家山《算数书》研究会诸专家认为应补以“而一”⁸二字。这种校补句法通顺而又与答数相符，文义完整而合理。然而据图版⁹可知，本题竹简即153号简，其简文至“四”字已抵竹简下端编线，可见此处“术”不是缺文，而是缺少后续的一支竹简。153号简出土编号为H103，而157号简的出土编号为H102，二简出土编号既相连，而出土位置也确实相邻。由于157号简的全部简文为“一即成”，内容与153号简内容相接。而如上节所论，157号简不属于“畧材”题，因此我们确定157号简是153号的续简，两简简文之间误脱一个“而”字。所以，我们将157号简列于此简之后，并以脱误例校补“【而】”字。

简文中“韦”借为“围”，古以“径尺为围”，这里的“围”实际上等于“尺”。因此“大四围二寸廿五分寸十四”的意思是“圆材”周长为 $42\frac{14}{25}$ 寸。据“术”文计算，“方材”的边长为： $42\frac{14}{25} \times 5 \div 7 \div 4 = \frac{38}{5} = 7\frac{3}{5}$ ，正与答案相符。因此，我们认为本题算法与答案的简文都没有问题。上引诸家中彭浩、郭世荣、郭书春认为本题有误，并各以己意解读、校改，我们与段耀勇、邹大海一样，认为他们都不正确。

本题之前《算数书》的所有60个算题中，虽然存在一定数量的脱文、衍文以及传抄错误，但是由于错误的“术”而产生错误答案的仅有“妇织”一个算题，而“妇织”问题性质上属于“趣味数学”而非“实用数学”¹⁰。也就是说，《算数书》中的实用算题的算法都是正确的。因此，从统计的角度看，本题的“术”也就很不可能是错误的。



而本题的“术”文算法与答案相符，而且对应于本题的“四而一”，后文所论“以方材畧”题中的算法中也相应地是“因而四之”。可见，本题的“术”文及答案肯定都没有问题。

古人“圆用规，方用矩”，因此圆内接正方形与圆的关系古人显然是清楚的，上引“畧材”则证明勾股定理在秦代也是人所熟知的知识，而从张家山汉简《算数书》的“方田”题及《九章算术》可知：古人在对形如 $N = a^2 + r$ 的自然数开平方时，常用 $\sqrt{N} \approx a + \frac{r}{2a+1}$ 为近似公式¹¹。

⁶ 参见彭浩：《张家山汉简〈算数书〉注释》，科学出版社，2001年，第110-111页；苏意雯、苏俊鸿、苏惠玉等：《〈算数书〉校勘》，台湾师大《HPM通讯》第三卷，2000年第10期；郭世荣：《〈算数书〉勘误》，《内蒙古大学学报（自然科学版）》，2001年第3期；郭书春：《〈算数书〉校勘》，《中国科技史料》，2001年第3期。段耀勇、邹大海：《〈算数书〉中“以畧材方”、“以方材畧”两问校证》，《自然科学史研究》，2003年第2期；日本张家山《算数书》研究会：《张家山汉墓〈算数书〉译注稿（4）》，第12-13页。

⁷ 参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简〔二四七号墓〕（释文修订本）》，文物出版社，2006年5月，第152、153页。按：释文据我们所批评的错误理解为基础而校改，这只引原简文。

⁸ 参见前注所引诸文，为避繁琐，此后引以上诸文从略。

⁹ 本简图版见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简〔二四七号墓〕》，文物出版社，2001年11月，第95页；出土位置编号及位置图见第318及322页。

¹⁰ 参见彭浩：前揭书。

¹¹ 参见彭浩：前揭书，第125页注2；李继闵：《〈九章算术〉导读与译注》，陕西科学技术出版社，1998年9月，第388页。