

张家山汉简《算数书》“𦉳材”三题

吴朝阳 晋文

张家山汉简《算数书》与“𦉳材”相关的共有“𦉳材”、“以𦉳材方”、“以方材𦉳”三个算题。“𦉳材”算题因为出土原简字迹难辨之处太多，造成原释文中有许多缺文，至今没有令人满意的释读，而“以𦉳材方”及“以方材𦉳”二题，则因为题中的公式与单纯的数学公式不一致，导致学者们意见纷纭、莫衷一是。本文首先将“𦉳材”原简字迹难辨处加以处理，从中得到关键线索，并考证出正确的释读。对“以𦉳材方”及“以方材𦉳”两个算题，我们则根据上古数学水平、算题的应用实际性质以及《算数书》中的例证展开论证，从而得到正确的释读。



一 “𦉳材”

张家山汉简《算数书》的“𦉳材”题共含 156、158 号两支简，张家山二四七号汉墓竹简整理小组的释文为：

𦉳（圓）材 有圓材一（？），斷之口口市口口口口口口口口大几何？曰：七（？）十（？）六（？）口口四寸半寸。述（术）曰：口自乘，以（156）入二寸益之，即大数已¹。（158）

由于很多文字无法释读，本题诸家均无法读通²。笔者对原简图版进行一定程度的技术处理，使一些关键字得以读出，部分图版处理结果如下³：

从图 1 可知，“圓材”之后还有余地，并有墨迹，因此，原释文“一”字可取。从图 2 可以看到，原释文“斷之口口市”是成问题的，对比“斷”字的隶书写法可以发现，此段竹简的第一个字左上有二小“口”字形，其形比“斷”之小“口”明显要大，而其下既没有“斷”字那么多笔划的墨迹，最左侧并无“斷”字之“乚”形之残墨，空间也不足以容纳“斷”字的左下部。因此这个字不是“斷”字，而应该是“𦉳”字。综合字迹及图 2 其他简文可以发现此字确为“𦉳”字，而此段简文为“𦉳之入二寸”。

“𦉳”与“斷”一字之差，关系到全题的理解与释读。岳麓书院藏秦简《数》书以及《九章算术·勾股》都有“𦉳圓材”的算题，其文援引如下：

[今]有圓材薶[埋]地，不智[知]小大，斫之，入材一寸而得平一尺，问材周大几（可）[何]？即曰：半平得五寸，令相乘也，以深一寸为法，如法得一寸。有[又]以深益之，即材径也⁴。

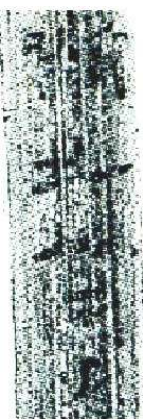


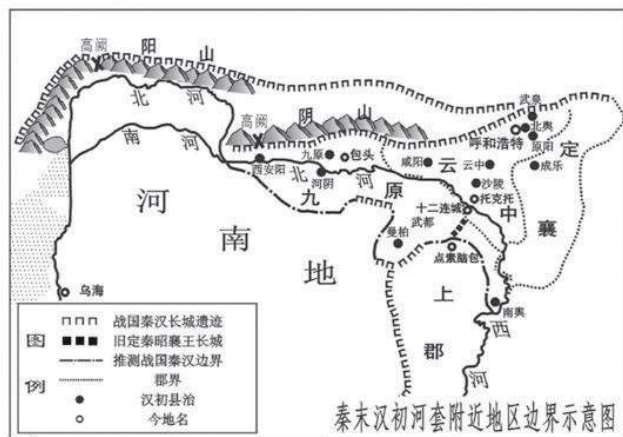
图 1：有圓材一 图 2：𦉳之入二寸 图 3：平尺四寸 图 4：曰大二尺有 图 5：六寸半寸

¹ 参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简[二四七号墓]（释文修订本）》，文物出版社，2006 年 5 月，第 153 页。按：整理小组误将 157 号简归入此题，为简化讨论，此处径略去此简。

² 参见：彭浩：《张家山汉简〈算数书〉注释》，科学出版社，2001 年，第 113 页；郭世荣：《〈算数书〉勘误》，《内蒙古大学学报（自然科学版）》，2001 年第 3 期；郭书春：《〈算数书〉校勘》，《中国科技史料》，2001 年第 3 期。

³ 原图片参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：前揭书，第 96 页 156 号简。

⁴ 简文转引自：肖灿、朱汉民：《岳麓书院藏秦简〈数〉的主要内容及历史价值》，《中国史研究》，2009 年第 3 期。



今有圆材，埋在壁中，不知大小。以锯锯之，深一寸，锯道长一尺。问径几何？答曰：材径二尺六寸。术曰：半锯道自乘，如深寸而一，以深寸增之，即材径⁵。

张家山汉简《算数书》本算题所论是“圆材”，简文有“斲之入二寸”句，并且“而得”、“问口大几何”、“寸自乘”、以及“入二寸益之”都可以明确释读，在简文中又都处于合适的位置。因此，对比以引岳麓秦简《数》及《九章算术》中的算题，本题毫无疑问是一个同类的“斲圆材”算题。因此，算题中无法确认的文字可以借助这两则算题的行文方式来做判断。

图3所示竹简片段第一字无法辨认，第二字的位置依上下文及墨迹形状应是“尺”字，第三字据文义是一个数字，依墨迹形状判断应为“六”或者“四”字，而最后一字依文义及残墨则可以肯定为“寸”字。此段竹简之前有“而得”二字，其中“而”字可辨，“得”字依上下文可以断定。对照岳麓书院藏秦简《数》书相应内容，可以判断此四字为“平尺四寸”或“平尺六寸”。

图4、图5两部分，原释文为“曰七(?)十(?)六(?)”及“口口四寸半寸”。据图5，“寸半寸”可辨，而前一字依残墨判断，或者如原释文是“四”字，或者是“六”字。图4除“曰”字外均不可辨，但依上下文知其为“曰大口尺口”。考虑图5简文是“口寸半寸”，而“尺”后面的字残墨之迹与“有”近似，故依行文此字应为“有[又]”字。至此，据计算可知，此答数为“二尺有六寸半寸”，而图3则为“平尺四寸”。

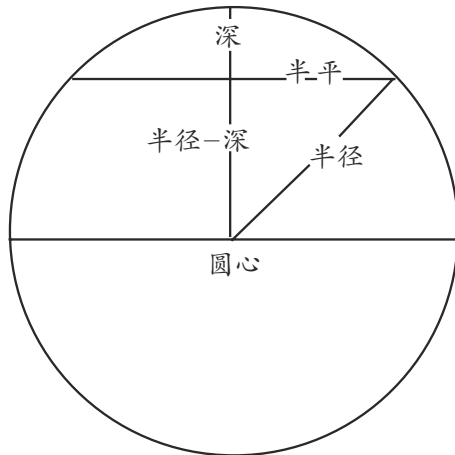
⁵ 参见：李继闵：《〈九章算术〉导读与译注》，陕西科学技术出版社，1998年9月，第695-697页。

对照上引岳麓秦简“术”的行文，可知158号简脱漏“为法，又以入二寸”七个字。因为“入二寸”在我们复原的简文中出现两次，所以这一脱误的原因是明显的：它是因简文上下有两处“入二寸”，抄写者不慎相涉而产生脱误。至此，我们得到复原的简文如下：

圆材 有圆[材]一，斲之入二寸，而得[平尺四]寸，问[材]大几何？曰：大[二尺有六]寸半寸。术[术]曰：[七]寸自乘，以(156)

入二寸【为法，又以入二寸】益之，即大数已。(158)

此处，158简中的“大”即问题中的“材大”，“大数”即为圆材直径之尺寸数。《九章算术》将此类算题归入“勾股”章，其计算公式由勾股定理推导而得，其推导过程如下：



如上图，(半径-深)、半平、半径构成直角三角形，据勾股定理得：

$$(\text{半径}-\text{深}) \times (\text{半径}-\text{深}) + \text{半平} \times \text{半平} = \text{半径} \times \text{半径}$$

展开、化简，得：

$$2 \text{ 深} \times \text{半径} = \text{半平} \times \text{半平} + \text{深} \times \text{深}$$

因此，

$$\text{直径} = \text{半平} \times \text{半平} / \text{深} + \text{深}$$

本题、上引岳麓秦简、《九章算术》三者算法的叙述方式相互均有所不同，但它们都是以上这个公式。按照这个公式，本题的计算如下：

$$\text{圆材的直径} = \frac{7 \times 7}{2} + 2 = 26 \frac{1}{2}.$$

二 “以畧材方”

张家山汉简《算数书》“以畧材方”及“以方材畧”两个算题，由于其“术”提供的公式不同于从数学出发而推得的所谓正确的公式，因而历来研究者要么认为其公式有误，要么认为其数据有误⁶。然而事实并非如此，我们将证明：这两个算题中的公式不是纯数学公式，它们是根据生产实际，测算以圆形木材制造的方形材大小的应用公式。本小节先讨论“以畧材方”算题，其简文如下：

以畧材方 以圓材为方材，曰：大四韦[围]二寸廿五分寸十四，为方材几何？曰：方七寸五分寸三。术曰：因而五之为实，令七而一，四（153）

【而】一即成⁷。（157）

原释文“以畧材方”只有153号简，此算法，即“术”文显然是不完整的，苏意雯等、段耀勇及邹大海、以及日本张家山《算数书》研究会诸专家认为应补以“而一”⁸二字。这种校补句法通顺而又与答数相符，文义完整而合理。然而据图版⁹可知，本题竹简即153号简，其简文至“四”字已抵竹简下端编线，可见此处“术”不是缺文，而是缺少后续的一支竹简。153号简出土编号为H103，而157号简的出土编号为H102，二简出土编号既相连，而出土位置也确实相邻。由于157号简的全部简文为“一即成”，内容与153号简内容相接。而如上节所论，157号简不属于“畧材”题，因此我们确定157号简是153号的续简，两简简文之间误脱一个“而”字。所以，我们将157号简列于此简之后，并以脱误例校补“【而】”字。

简文中“韦”借为“围”，古以“径尺为围”，这里的“围”实际上等于“尺”。因此“大四围二寸廿五分寸十四”的意思是“圆材”周长为 $42\frac{14}{25}$ 寸。据“术”文计算，“方材”的边长为： $42\frac{14}{25} \times 5 \div 7 \div 4 = \frac{38}{5} = 7\frac{3}{5}$ ，正与答案相符。因此，我们认为本题算法与答案的简文都没有问题。上引诸家中彭浩、郭世荣、郭书春认为本题有误，并各以己意解读、校改，我们与段耀勇、邹大海一样，认为他们都不正确。

本题之前《算数书》的所有60个算题中，虽然存在一定数量的脱文、衍文以及传抄错误，但是由于错误的“术”而产生错误答案的仅有“妇织”一个算题，而“妇织”问题性质上属于“趣味数学”而非“实用数学”¹⁰。也就是说，《算数书》中的实用算题的算法都是正确的。因此，从统计的角度看，本题的“术”也就很不可能是错误的。



而本题的“术”文算法与答案相符，而且对应于本题的“四而一”，后文所论“以方材畧”题中的算法中也相应地是“因而四之”。可见，本题的“术”文及答案肯定都没有问题。

古人“圆用规，方用矩”，因此圆内接正方形与圆的关系古人显然是清楚的，上引“畧材”则证明勾股定理在秦代也是人所熟知的知识，而从张家山汉简《算数书》的“方田”题及《九章算术》可知：古人在对形如 $N = a^2 + r$ 的自然数开平方时，常用 $\sqrt{N} \approx a + \frac{r}{2a+1}$ 为近似公式¹¹。

⁶ 参见彭浩：《张家山汉简〈算数书〉注释》，科学出版社，2001年，第110-111页；苏意雯、苏俊鸿、苏惠玉等：《〈算数书〉校勘》，台湾师大《HPM通讯》第三卷，2000年第10期；郭世荣：《〈算数书〉勘误》，《内蒙古大学学报（自然科学版）》，2001年第3期；郭书春：《〈算数书〉校勘》，《中国科技史料》，2001年第3期。段耀勇、邹大海：《〈算数书〉中“以畧材方”、“以方材畧”两问校证》，《自然科学史研究》，2003年第2期；日本张家山《算数书》研究会：《张家山汉墓〈算数书〉译注稿（4）》，第12-13页。

⁷ 参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简〔二四七号墓〕（释文修订本）》，文物出版社，2006年5月，第152、153页。按：释文据我们所批评的错误理解为基础而校改，这只引原简文。

⁸ 参见前注所引诸文，为避繁琐，此后引以上诸文从略。

⁹ 本简图版见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简〔二四七号墓〕》，文物出版社，2001年11月，第95页；出土位置编号及位置图见第318及322页。

¹⁰ 参见彭浩：前揭书。

¹¹ 参见彭浩：前揭书，第125页注2；李继闵：《〈九章算术〉导读与译注》，陕西科学技术出版社，1998年9月，第388页。



据这个公式计算, 则 $\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}=\sqrt{7^2+1}\approx 7\frac{1}{15}$, 因此,

边长为 5 的正方形之斜边边长略大于 7, 可见《孙子算经》所谓“见邪求方, 五之, 七而一¹²”是古已有之的近似公式。此外, 从张家山汉简《算数书》中的“困盖”、“鬲亨”、“井材”等算题可知¹³, “径一周三”, 即圆周率约等于三也是当时众所周知之事。邹大海先生在深入研究传世文献及秦简之后, 得出的结论说: “《九章》的主体算法在先秦已经用到¹⁴”, “先秦必然用到了汉《九章》所达到的那种高水平的数学知识¹⁵”, 这些结论也从宏观上支持我们的看法。因此, 我们可以肯定: $\sqrt{2}\approx 7/5$ 以及 $\pi\approx 3$ 在秦代是一件广为人知的事实。所以, 如果应用“见邪求方, 五之, 七而一”, 则“以圆材为方材”的公式应是:

$$\text{圆材周长} \times 5 \div 7 \div \text{圆周率}。$$

若再以“径一周三”替换以上公式中的圆周率, 则公式变成:

$$\text{圆材周长} \times 5 \div 7 \div 3。$$

也就是说, 本题“术”文的最后一句似乎应该是“三而一”而不是“四而一”。然而, 我们前面已论证本题的算法与算题所给的答数相符, 因而不可能出错的, 因此, “术”文的“四而一”不是源于错误的数学知识, 而是另有原因。

事实上圆周率是略大于三的, 很多迹象都表明古人知道这一事实。如果算法是“三而一”, 那么除数小了, 算出来的内接正方形的边长就会比实际可能的尺寸大, 加上“五之, 七而一”的近似, 由 $\frac{\sqrt{2} \times \pi}{\frac{7}{5} \times 3} \approx 1.058$ 可知,

依“径一周三”计算出的答案比实际数字会大出 6%, 可见, 实际应用中不能以“五之, 七而一”以及“三而一”来计算从“圆材”可能得到的“方材”的边长, 也就是说于实际问题而言, “三而一”是不可行的。另一方面, 本题是一个实用问题, 实际的“圆材”可能不那么圆, 其尾部直径也必须略小, 甚至木材表层可能质地不堪使用, 因而计算可得到的“方材”直径时, 留有余量的估算是现实问题的需要。本算题简文明确说“以圆材为方材”, 这是极其值得重视的! 这句简文说明“以圆为方”的简

¹² 佚名:《孙子算经》, 文渊阁《四库全书》电子版, 卷上。

¹³ 参见彭浩: 前揭书, 第 107-110 页。

¹⁴ 邹大海:《中国数学的兴起与先秦数学》, 河北科学技术出版社, 2001 年 9 月, 第 434 页。详细论证请参看该书第四、五章。

¹⁵ 邹大海:《睡虎地秦简与先秦数学》, 中国科学技术史学会第六届代表大会论文, 2000 年 8 月。

端题名只是本问题名称的略称,本算题所讨论的是“圆材”及“方材”,而不是“圆”和“方”,也就是说,本算题是实际应用题而不是纯数学问题。如上所论,以“三而一”来计算方材边长是脱离实际的,可见采用“四而一”的计算公式正是留有余量的边长估算法,而不是数学错误。此前诸专家未见及此,不恰当地将这个算题等同于“已知圆周长,求其内接正方形的边长”这样单纯的数学问题,这正是他们认为本算题有错误的原因。

总而言之,古人既已知圆周率大约为3,算题中却使用“四而一”进行计算,而计算公式与答案又完全相符,可见其中的“四而一”是因其为“以圆材为方材”的应用算题而给出的留有余量的估算式。日本张家山《算数书》研究会诸专家虽然没有详细论证,但同样认定“四而一”是实际操作留出余量的计算方法¹⁶。此外,从各种出土秦简可以发现,秦人在基层实行严密而高度数量化的管理,因此我们进一步认为,“以圆材为方材”问题中“四而一”的计算方式并非随意的,应有相当于“程”的官方规定为依据。



三 “以方材畧”

关于“以畧材方”算题的校释中,专家主要是认为计算公式有失误或抄误,或者认为算题中的数据有误,总之被认为的错误在一定程度上还不算严重。“以方材畧”算题则不同,很多专家认为这个算题的算法是从根本上就错了。这些专家认为本题的算法把“以方材畧”作为“以畧材方”的逆问题是一个根本性错误,事实上却是他们错误理解了这个问题。我们先来看看这个算题的简文:

以方材畧 以方为圆,曰:材方七寸五分寸三,为圆材几何?曰:四韦[围]二寸廿五分十四。•术曰:方材之一面即(154)

圆材之径也,因而四之,【七之】以为实,令五而成一¹⁷。(155)

简文中的“曰材”二字,段耀勇、邹大海校改为“材曰¹⁸”,并以“材”属上句,构成“圆材”一词。我们认为与下文对照,可知此处“材”字即是“方材”,因其后有“方”字而将“方材”省称为“材”,故保留原简文为妥。此外,本题“术”文中“方材之一面即圆材之径也”一句看似难以读通。然而“径”通“经”,“横度之名也¹⁹”,这种意义虽与“径”的原意相近,但依上下文应理解为“横截面”。因此,我们认为此句即是解释“方材之一面”与“圆材”截面的关系。

对比问题的已知条件中的数据、答案以及“术”即算法的行文,本题确实是把“以方材畧”作为“以畧材方”问题的逆问题,依“以畧材方”题的算法,可知原简误脱“七之”二字,故校补如上。依校补后的算法,本题具体计算为:

圆材之径 = $7\frac{3}{5} \times 4 \times \frac{7}{5} = 42\frac{14}{25}$, 由已知条件中的数据,根据算法计算的结果与算题中的答案完全相符。

如上所说,本题从算法来看是“以畧材方”题的逆问题²⁰。我们在上节已经论证,“以畧材方”是“以圆材为方材”的实用算题而不是单纯的数学问题,其中“四而一”的算法源于为实际可操作性而设的加工余量。也就是说,“以畧材方”问题是“已知圆材周长,求由其所割削而得的方材的边长”这样一个应用问题。本题既是“以畧材方”的逆问题,则是一个“已知所得方材的边长,求所需圆材的周长”的实用算题。

然而,国内各专家既认为“以畧材方”题是“已知圆周长,求其内接正方形的边长”的纯数学算题,本题就被相应地理解为“已知正方形的边长,求其内切圆的周长”的问题。由于这样的问题不是“以畧材方”的逆问题,因而彭浩、郭世荣、郭书春、段耀勇及邹大海²¹等专家都认为这个问题的算法是错的,并给出了各自不同的校改方案。

我们认为,以为《算数书》会在这样一个实际问题上有算法错误是一种脱离实际的想当然。从整部《算数书》看,它是秦、汉低层官吏在实际管理中遭遇数学问题时的参考书,其问题基本上全部都是现实生活中的问题。就“以畧材方”题而言,其在计算由圆材割取方

¹⁶ 参见日本张家山《算数书》研究会:《张家山汉墓〈算数书〉译注稿(4)》,第12页注5。

¹⁷ 参见:张家山二四七号汉墓竹简整理小组:《张家山汉墓竹简[二四七号墓](释文修订本)》,文物出版社,2006年5月,第153页。按:释文据我们所批评的错误理解为基础而校改,此只引原简文。

¹⁸ 段耀勇、邹大海:《〈算数书〉中“以畧材方”、“以方材畧”两问校证》,《自然科学史研究》,2003年第2期。

¹⁹ 参见宗福邦等编:《故训汇纂》,商务印书馆,2003年7月,第750页“径”字条第32义项。

²⁰ 日本张家山《算数书》研究会诸专家也认定本题是“以畧材方”题的逆问题,但对其正确性未作论证。参见日本张家山《算数书》研究会:《张家山汉墓〈算数书〉译注稿(4)》,第13-14页。

²¹ 参见彭浩:《张家山汉墓〈算数书〉注释》,科学出版社,2001年,第111-113页;郭世荣:《〈算数书〉勘误》,《内蒙古大学学报(自然科学版)》,2001年第3期;郭书春:《〈算数书〉校勘》,《中国科技史料》,2001年第3期;段耀勇、邹大海:《〈算数书〉中“以畧材方”、“以方材畧”两问校证》,《自然科学史研究》,2003年第2期。

材时留有余量的做法，显然是实际算题的需要。因此，倘若本题算法错误，它早应由实践得到更正。再者，“材”之本义及最常用词义都是“木材”，以木材而论，将“圆材”加工成“方材”是现实生活中常有之事，反之上古原木于官方极为易得，又有多少官吏需要将“方材”加工成“圆材”呢？所以，作为实用算题，本题只能是官吏在其现实管理中需要的应用题：某工程需要某种大小的方材，那么官方应该发给工匠什么规格的圆材？

既然本题是“以圆材方”问题的逆问题，那么问题所求应该是“（留有余量的前提下）正方形外接圆的周长”，国内诸专家认定此题讲的是“内切圆”而不是“外接圆”，除了不理解“以圆材方”题中“四而一”是留有余量的做法之外，还因为他们对本题“为圆材几何”这一问句中的“为”字的理解。单凭文句理解，“以方材为圆材”句中的“为”字似乎应训“作”，因而文句自然以“从方材获取内切圆材”的解释为妥。然而，这种理解缺乏对本题、本句作结合实际的综合分析，与我们以上的论证相抵触，因而并不可靠。“为”字自古多义，此处亦未必训“作”。

事实上，古文中的“为”字除训“作”之外，尚可训“用”、训“谓”、训“曰”、训“于”、训“如”²²等等，因此，综合考虑我们以上的讨论，本题“为圆材几何”问句中的“为”字不必训为“作”，其意思或应近于“用”、“需要”。对“为”字作近似于此的训解，在张家山汉简《算数书》中就可以找到例子。《算数书》“程禾”题说“禾黍一石为粟十六斗泰半斗，舂之为粳米一石”，而“米求粟”题说“今有米七分升六，当为粟几何”²³，这两段文字虽然说的都是“粟”、“米”的换算，但其中“为”字的意思和用法却不相同。“程禾”题说“为粳米一石”时明确说“舂之”，所以其“为”字与“以圆材方”题“以圆材为方材”一句中的“为”字用法相同。然而“粟”可以舂为“米”，“米”却不能做成“粟”，因此“米求粟”算题的题名及其“当为粟几何”句中，“为”字的意思近于“需要”，实则可以简单地解释为“换算”。“为”字在“当为粟几何”句中的这种用法，与“为圆材几何”句正可相比拟。可见，“以方材圆”正是“以圆材方”算题的逆问题，两个算题中的“为”字可以有不同解释，情形正与“粟”、

“米”换算问题相似。事实上，秦、汉间“粟”与“米”间的算题全部可以看成按比率换算²⁴，相似地，“以圆材方”与“以方材圆”二题也正可看成是“圆材”、“方材”间的“换算”问题。

总之，综合我们在“以圆材方”及“以方材圆”题中的论证，结论是很清楚的：“以方材圆”算题是根据目标“方材”的大小计算所需“圆材”大小的实际问题，它正是“以圆材方”算题的逆算题，本题除了误脱“七之”二字外，其问题、算法及答案都没有错误。“以圆材方”及“以方材圆”两个算题的算法都是正确的，它们是根据留有余量规定而建立的实际应用公式。

²² 参见宗福邦等编：《前汉书》，第1386-1388页“为”字条。

²³ 参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简[二四七号墓]（释文修订本）》，文物出版社，2006年5月，第144页、147页。

²⁴ 按：秦、汉时期粟、米换算比率为50:30，这个比率见于张家山汉简《算数书》、岳麓书院藏秦简《数》及《九章算术》等出土和传世文献。



作者简介：吴朝阳，中国科学技术大学数学系应用数学硕士；美国 Louisiana State University 数学硕士，计算机硕士，数学博士；南京师范大学历史学博士；现于南京大学数学系任教。